Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
COM CONSULTA de UM TEXTO DE APOIO 2.15

1.

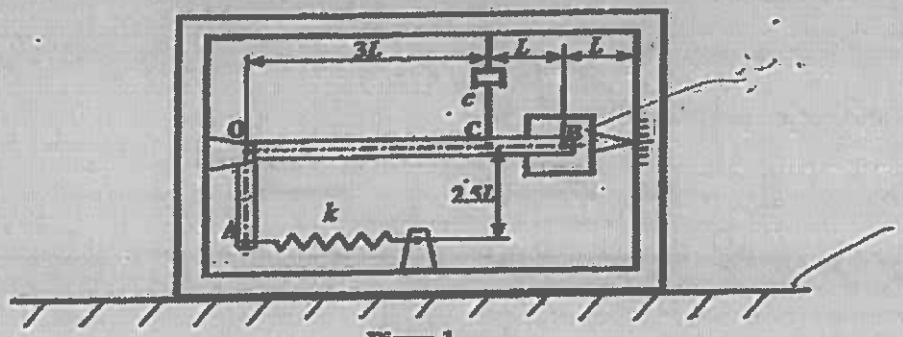


Figura 1

O desenho (Figura 1) representa um instrumento para medir a amplitude do deslocamento vertical de vibração de uma superfície. O instrumento é constituído por:

- Um braço rígido AOB em forma de L, de massa desprezável e que roda em torno do ponto O;
- Um corpo rígido de massa de m e momento de inércia I_B (unidades kg m^2) em relação a um eixo que passa por B; este corpo encontra-se ligado ao braço no ponto B;
- Um amortecedor de constante de amortecimento c, ligado ao braço no ponto C;
- Uma mola de constante de rigidez k, ligada ao braço no ponto A.

Em equilíbrio estático o segmento OB encontra-se na horizontal. Assuma que os deslocamentos são pequenos.

a) Obtenha a equação do movimento de rotação do braço.

Suponha que a frequência natural não amortecida do instrumento é 2.5 Hz, a razão entre duas amplitudes consecutivas de vibração em regime livre é 111 e a massa é 0.5 Kg. Suponha ainda que a equação do movimento angular é: $25m\ddot{\theta}(t)+9c\dot{\theta}(t)+6.25k\theta(t)=0$

Determine:

b) a constante de rigidez da mola;
c) a razão de amortecimento;
d) a constante de amortecimento;
e) a amplitude do deslocamento de vibração da superfície quando a frequência de vibração é 2 Hz e o ponteiro indica uma amplitude de 0.5 mm (nota: o instrumento não se encontra calibrado).

2. O sistema representado na Figura 2 é constituído por um carro rígido de massa $2m$, ligado ao exterior por uma mola de rigidez k, que translada na direcção horizontal (deslocamento $x_1(t)$) por acção de uma solicitação harmónica $F\cos(\omega t)$. Tendo-se verificado a existência de vibrações indesejáveis acrescentou-se um disco rígido de massa m e raio R (momento de inércia $mR^2/2$ [kg m^2]) ligado ao carro por uma mola de rigidez k. O disco rola sem escorregar sobre o carro e $x_2(t)$ designa o deslocamento absoluto do seu centro de massa na horizontal. Determine

a) as equações do movimento recorrendo às Equações de Lagrange;
b) as frequências naturais e as formas naturais de vibração;
c) as equações de movimento na base modal;
d) o valor da frequência de excitação para a qual a amplitude de vibração do carro é nula.

Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
COM CONSULTA de UM TEXTO DE APOIO

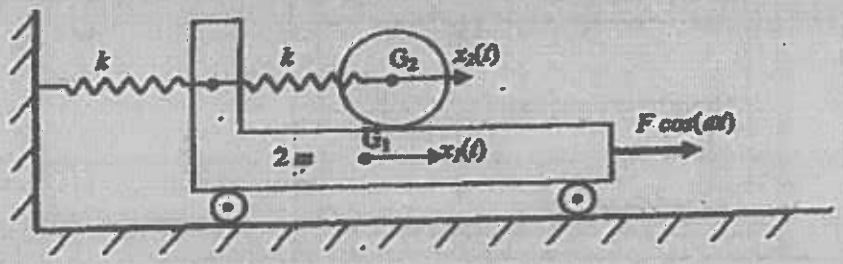


Figura 2

3. A viga representada na Figura 3 tem comprimento L, secção transversal de área A e segundo momento de área I (m^4); o módulo de elasticidade do material é representado por E e a massa volúmica por ρ. A viga está apoiada em dois apoios simples nas extremidades e ligada a duas molas, a primeira tem rigidez k e a segunda é uma mola de torção com rigidez k_t. Considere apenas movimentos devidos à flexão da viga, sendo os deslocamentos pequenos.

a) Quais são as condições fronteira do sistema?

b) A função $V(x) = \delta sen(\pi x/L)$ pode ser aplicada para obter uma estimativa para a frequência fundamental de vibração através do método da energia de Rayleigh; ou seja, é uma função admissível?

c) Obtenha uma estimativa para a frequência fundamental de vibração.

d) A função sugerida em b) é aplicável para as seguintes condições limite:

1) $k \to 0$ e $k_t \to 0$?

2) $k \to \infty$ e $k_t \to 0$?

e) Sugira uma função admissível para o caso em que a mola a meio vão é substituída por um apoio simples.

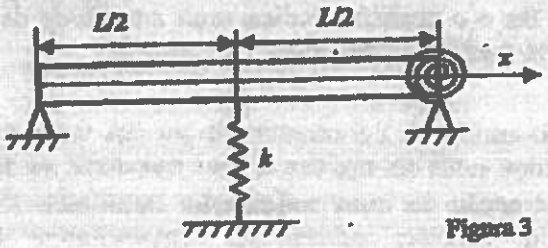
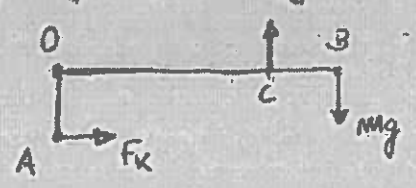


Figura 3

Justifique as respostas.

① Diag. equilíbrio F_c estático

a)

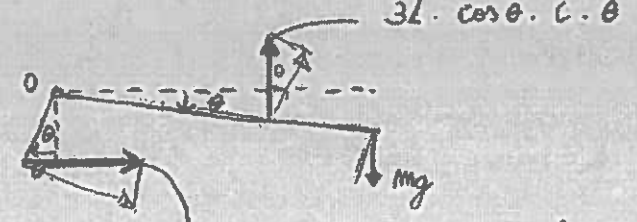


$F_c = C \cdot N = C \cdot \dot{\theta}$

$F_K = K \cdot \Delta x$

$\sin\theta \simeq \theta$

$\cos\theta \simeq 1$



Equação do movimento

$$\Sigma M_O = 0 \Leftrightarrow 2{,}5L F_K = 4L\,mg \Leftrightarrow 2{,}5(2{,}5L K \theta_{est}) = 4mg$$

$$\Leftrightarrow \theta_{est} = \frac{4mg}{2{,}5^2 L K}$$

$$I_O = \underbrace{I_{barra}}_{=0} + I_{massa}$$

$$= I_B + m d^2 = I_B + m(4L)^2 = I_B + 16mL^2$$

$$4mgL\cos\theta - (2{,}5L)^2 K(\theta + \theta_{est}) - (3L)^2 \cdot C \cdot \dot{\theta} = (I_B + 16mL^2)\cdot\ddot{\theta}$$

$$(I_B + 16mL^2)\cdot\ddot{\theta} + 9L^2 \cdot C \cdot \dot{\theta} + (2{,}5L)^2 K\theta + (2{,}5L)^2 K \cdot \frac{4mg}{2{,}5^2 L K} - 4mgL = 0$$

$$(I_B + 16mL^2)\ddot{\theta} + 9L^2 C \cdot \dot{\theta} + (2{,}5L)^2 \cdot K\theta + 4mgL - 4mgL = 0$$

b) $\omega_m = 2{,}5\ Hz$ $\qquad \frac{X(t_1)}{X(t_1+T)} = 111$ $\qquad m = 0{,}5\ kg$

$$25m\ddot{\theta}(t) + 9C\dot{\theta}(t) + 6{,}25K\theta(t) = 0$$

$$\omega_m = 2\pi \times 2{,}5 = 5\pi \quad rad/s$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 5\pi = \sqrt{\frac{6{,}25K}{25\times 0{,}5}} \Leftrightarrow (5\pi)^2 = \frac{6{,}25K}{25\times 0{,}5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{0{,}5(5\pi)^2 \times 25}{6{,}25} = 493{,}5\ N/m$$

U.PORTO www.up.pt

c) $\zeta = ?$ $\quad \zeta = \dfrac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \qquad \delta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{11}\right) = 2{,}355$

$$\zeta = \frac{2{,}355}{\sqrt{(2\pi)^2 + 2{,}355^2}} = 0{,}351 \rightarrow \text{Sistema sub-amortecido}$$

d)
$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} w_m} \Leftrightarrow 0{,}351 = \frac{9.c}{2 \times 25 \times 0{,}5 \times 5\pi} \Leftrightarrow c = 15{,}32 \text{ Kg/A}$$

---

a) Os 0,5 mm são o deslocamento de massa em relação à base móvel, logo trata-se de um deslocamento relativo.

$$TR_R = \frac{Z(w)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad ; \quad \beta = \frac{w}{w_m} = \frac{2 \times 2\pi}{2{,}5 \times 2\pi} = 0{,}8$$

$$TR_R = \frac{0{,}8^2}{\sqrt{(1-0{,}8^2)^2 + (2 \times 0{,}351 \times 0{,}8)^2}} = 0{,}959$$

$$\frac{Z(w)}{Y} = 0{,}959 \Leftrightarrow \frac{0{,}5 \times 10^{-3}}{Y} = 0{,}959 \Leftrightarrow Y = 0{,}521 \text{ mm}$$

(2)

a) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = F \cos(wt)$$

$$\boxed{J_0 = \frac{I_0}{n^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

- Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Como o movimento x_2 é absoluto não é necessário entrar com a relação (inércia da roda)

- Energia Potencial

$$V = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 - K x_2 x_1 + \frac{1}{2} K x_1^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1 - Kx_2 + Kx_1 = 2Kx_1 - Kx_2 = K(2x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = Kx_2 - Kx_1 = K(x_2 - x_1)$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 + Kx_2 = F \\ m\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Problema característico $\Delta(\omega^2) = |[K] - \omega^2[m]| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2K - 2m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow (2K - 2m\omega^2)(K - m\omega^2) - (-K)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2K^2 - 2Km\omega^2 - 2m\omega^2 K + 2m^2\omega^4 - K^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow K^2 - 4Km\omega^2 + 2m^2\omega^4 = 0 \Leftrightarrow \omega_1^2 = 0,29289$$
$$\omega_2^2 = 1,707$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2} = 0,54 \cdot \sqrt{\frac{K}{m}}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_2^2} = 1,31 \cdot \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- Formas naturais

$$\begin{bmatrix} 2K - 2\cancel{m} \times 0,54^2 \cdot \frac{K}{\cancel{m}} & -K \\ -K & K - \cancel{m} 0,54^2 \frac{K}{\cancel{m}} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (2\cancel{K} - 0,5832\cancel{K}) \cdot U_{11} - \cancel{K} U_{21} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{11}}{U_{21}} = \frac{1}{2 - 0,5832} = 0,71$$

$$\{U\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,71 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

www.up.pt PORTO

$$\omega_2 = 1{,}31 \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \begin{bmatrix} 2K - 2m \cdot 1{,}31^2 \cdot \frac{K}{m} & -K \\ -K & K - m \cdot 1{,}31^2 \cdot \frac{K}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (2K - 3{,}43K)\,U_{12} - KU_{22} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{12}}{U_{22}} = \frac{1}{2-3{,}43} = -0{,}7$$

$$\{U\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) Normalizando para massas modais unitárias

$$\{\phi\}_1 = \frac{\{U\}_1}{\sqrt{\{U\}_1^T [m] \{U\}_1}} = \frac{\begin{Bmatrix} 0{,}71 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\sqrt{2{,}0082}} = \begin{Bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{\{U\}_2}{\sqrt{\{U\}_2^T [m] \{U\}_2}} = \frac{\begin{Bmatrix} -0{,}7 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\sqrt{1{,}98}} = \begin{Bmatrix} -0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} & -0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} & 0{,}71/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

Transformação de coordenadas:

$$\underbrace{[\phi]^T [m] [\phi]}_{[I]} \{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\phi]^T [c] [\phi]}_{[2\xi\Omega]} \{\eta(t)\} + \underbrace{[\phi]^T [K] [\phi]}_{[\Omega^2]} \{\eta\} = [\phi]^T \{F\}$$

(Não existe matriz c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0{,}54 & 0 \\ 0 & 1{,}31 \end{bmatrix} \left(\sqrt{K/m}\right) \right)^2}_{\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 1{,}71 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{K}{m}\right)} \cdot \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{0{,}5}{\sqrt{m}} \cdot F \\ -\frac{0{,}5}{\sqrt{m}} \cdot F \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 0{,}3\frac{K}{m} \cdot \eta_1(t) = \frac{0{,}5F}{\sqrt{m}} \\ \ddot{\eta}_2(t) + 1{,}71\frac{K}{m} \cdot \eta_2(t) = -\frac{0{,}5F}{\sqrt{m}} \end{cases}$$

2 equações desacopladas!!

d) $X_1(w) = 0 \Rightarrow w = ?$

$$X_1(w) = \frac{z_{22} f_1 - z_{12} f_2}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 2K - 2mw^2 & -K \\ -K & K - mw^2 \end{bmatrix}$$

$$0 = \frac{(K - mw^2) f}{(2K - 2mw^2) \cdot (K - mw^2) - (-K \cdot (-K))} \Leftrightarrow w =$$

Exame 23/12/05

Exercício 1

$F_c = c \cdot (\dot{v})$

$F_k = k \cdot \Delta x$

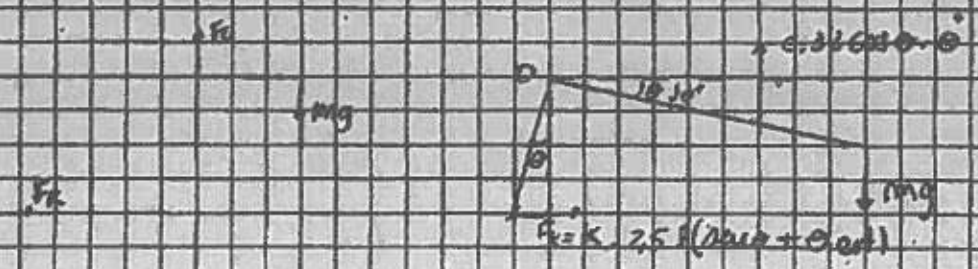
a) equação do movimento de rotação do braço

Diagrama do equilíbrio dinâmico

$\operatorname{sen}\theta \cong \theta$

$\cos\theta \cong 1$

Diagrama de eq. estática



Eq. movimento

$\Sigma M_O = 0 \Leftrightarrow 2{,}5\,l\,F_k = 4\,l\,mg \Leftrightarrow 2{,}5\,(2{,}5\,l\,\theta_{est}) = 4\,mg \Leftrightarrow \theta_{est} = \dfrac{4\,mg}{2{,}5^2\,l\,k}$

$J_O = \underbrace{J_{O}}_{=0} + J_m = I_b + md^2 = I_b + m\,(4l)^2 = I_b + 16\,ml^2$

$4\,mg\,l\cos\theta - (2{,}5\,l)^2 k\,(\theta + \theta_{est}) - 3\,l\,c\,\dot{\theta}\,3\,l = (I_b + 16\,ml^2)\,\ddot{\theta}$

$\Rightarrow (I_b + 16\,ml^2)\,\ddot{\theta} + 9\,l^2 c\,\dot{\theta} + (2{,}5\,l)^2 k\,\theta + (2{,}5\,l)^2 k\,\dfrac{4\,mg}{2{,}5^2\,l\,k} - 4\,mg\,l = 0$

$\Rightarrow (I_b + 16\,ml^2)\,\ddot{\theta} + 9\,l^2 c\,\dot{\theta} + (2{,}5\,l)^2 k\,\theta + \cancel{4\,mg\,l} - \cancel{4\,mg\,l} = 0$

b) $\omega_n = 2{,}5\ Hz$ $\quad \dfrac{x(t_1)}{x(t_1+1)} = 111$ $\quad m = 0{,}5\ kg$

$25\,m\,\ddot{\theta}(t) + 9\,c\,\dot{\theta}(t) + 6{,}25\,k\,\theta(t) = 0$

$c = ?$ $\quad \omega = 2\pi f_n \Rightarrow \omega_n = 2\pi \times 2{,}5 = 5\pi\ rad/s$

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow 5\pi = \sqrt{\dfrac{6{,}25\,k}{25 \times 0{,}5}} \Rightarrow k = 493{,}5\ N/m$

c) a 10700 de amortecimento ξ

$\xi = \dfrac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$ $\quad \delta = \dfrac{1}{2} \cdot \ln(111) = 2{,}355$

$\xi = 0{,}351 \Rightarrow$ Sistema sub-amortecido

d) a constante de amortecimento c

$\xi = \dfrac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\,\omega_n} \Rightarrow 0{,}351 = \dfrac{9\,c}{2 \times 25 \times 0{,}5 \times 5\pi} \Rightarrow c = 15{,}32\ kg/s$

e) $\omega = 2\ Hz$ $\quad$ $= 0{,}5\ mm =$

os 0,5 mm são o deslocamento da massa em relação à base móvel, logo temos um movimento relativo.

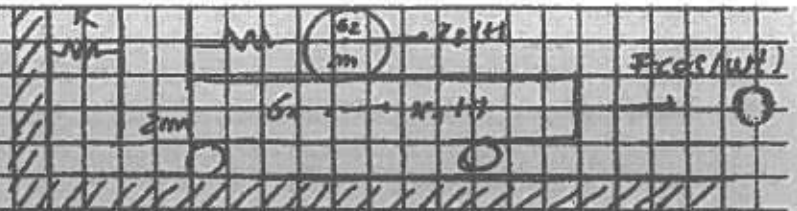
$$TR_{(\omega)} = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \Rightarrow \frac{0{,}5\times10^{-3}}{Y} = \frac{0{,}8^2}{\sqrt{(1-0{,}8^2)^2 + (2\times0{,}351\times0{,}8)^2}}$$

$$\Rightarrow Y = 0{,}521\ mm$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\times2\pi}{2{,}5\times2\pi} = 0{,}8$$

Exercício 2

a) eq. movimento por Lagrange



Eq. Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial x_1}}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = F\cos(\omega t) \qquad y_0 = \frac{I_0}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial x_2}}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \qquad I_2 = \frac{mR^2}{2}$$

• Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \cancel{\frac{1}{2} y_0 \cdot \dot{\theta}_0} \qquad \dot{\theta} = \frac{x_2}{R}$$

$$= \frac{1}{2} 2m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \cancel{\frac{1}{2} \frac{I_0}{r^2} \cdot \dot{\theta}}$$

$$= m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Como o movimento x_2 é absoluto não temos de entrar com a rotação (inércia do rodo)

• Energia Potencial

$$V = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1 - K(x_2 - x_1) = 2Kx_1 - Kx_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = K(x_2 - x_1) = Kx_2 - Kx_1$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) frequências e formas naturais

· Problema característico $\Delta(\omega) = |[k] - \omega^2[m]| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow (2k - 2m\omega^2) \cdot (k - m\omega^2) - (-k)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0{,}54 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1{,}31 \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

· Formas naturais

$$[B] \cdot \{U\} = \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - 2m \cdot 0{,}54^2 \cdot \frac{k}{m} & -k \\ -k & k - m \cdot 0{,}54^2 \cdot \frac{k}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2k - 0{,}583\,k) \cdot U_{11} - k\,U_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{U_{11}}{U_{21}} = 0{,}71 \qquad \{U\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}71 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 1{,}31 \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \begin{bmatrix} 2k - 2m \cdot 1{,}31^2 \frac{k}{m} & -k \\ -k & k - m \cdot 1{,}31^2 \frac{k}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2k - 3{,}43\,k) \cdot U_{12} - k\,U_{22} = 0 \Rightarrow \frac{U_{12}}{U_{22}} = -0{,}7 \qquad \{U\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) as equações de movimento na base modal

normalizando para massas modais unitárias

$$\{\phi\}_1 = \frac{\{U\}_1}{\sqrt{\{U\}_1^T [m] \{U\}_1}} = \begin{Bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} \end{Bmatrix} \qquad [\phi] = \begin{bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} & -0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} & 0{,}71/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{\{U\}_2}{\sqrt{\{U\}_2^T [m] \{U\}_2}} = \begin{Bmatrix} -0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

· Transformação de coordenadas: $\{x(t)\} = [T]\{M(t)\}$

$$[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{M}(t)\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{M(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$$

e aplicando a propriedade de ortogonalidade dos vetores modais:

$$[I]\{\ddot{M}(t)\} + [\Omega^2]\{M(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{m}_1(t) \\ \ddot{m}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}3\frac{K}{m} & 0 \\ 0 & 1{,}7\frac{K}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{0{,}5}{\sqrt{2m}} \cdot F \\ \frac{-0{,}5}{\sqrt{2m}} \cdot F \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{m}_1(t) + 0{,}3\frac{K}{m} m_1(t) = \frac{0{,}5F}{\sqrt{2m}} \\ \ddot{m}_2(t) + 1{,}7\frac{K}{m} m_2(t) = -\frac{0{,}5F}{\sqrt{2m}} \end{cases}$$ 2 equações desacopladas!!!

d) $\omega = 1 \qquad X_1(\omega) = 0$

$$X_1(\omega) = \frac{z_{22}F_1 + z_{12}F_2}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \qquad [Z] = \begin{bmatrix} 2K - 2m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$0 = \frac{(K - m\omega^2)F}{(2K - 2m\omega^2)(K - m\omega^2) - K^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad ?$$